Точные поточечные оценки градиента потенциалов Рисса

Владимир Г. Ткачев (Linköping University)

Геометрический анализ, Волгоград, 23 апреля 2024

(посвящается 80-летию со дня рождения В. М Миклюкова (7.1.1944–1.10.2013))

Три богатыря (санаторий "Горная поляна", Волгоград, 2004)

Книги по геометрическому анализу

Вместо предисловия

Возможный предок ВВМ:

№ 145

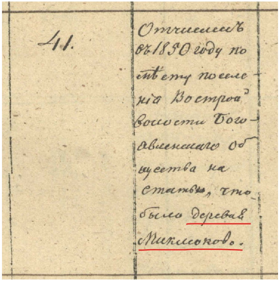
1562/63 г. — Данная Ивана Иванова с. Филисова с детьми Семеном, Никифором, Ананием и Александром иг. Калязина м-ря Лаврентию на треть д. Павелкова в Нерехотском ст. Кашинского у.

Се яз, Иван Иванов сын Филисова, да с своими детьми с Семеном да с Микифором, да с Онаньею, да с Олександром дали есмя в дом живоначальные Троице и святым страстотерпцом Христовым Борису и Глебу и преподобному чюдотворцу Макарию в Колязин манастырь игумену Лаврентию з братьею, или по нем хто иныи игумен будут, свою вотчину треть деревни Павелкова в Кашинском уезде в Нерохотцком стану в Ушаковскои волости, что ее выменили у колязинского игумена у Инокентия у Сущова з братьею на свою на вотчинную деревню на Чернои Ручеи.

А та наша треть деревни Павелкова нигде не заложена ни в каких кабалах, ни в денежных, ни в хлебных. И где на ту нашу треть деревни Павелкова вылягут какие крепости, купчая или меновная, или кабалы хлебные или денежные в нашем долгу, и мне, Ивану, и моим детем та своя треть деревни Павелкова очищати, а к троицкому Колязина манастыря к ыгумену Лаврентию з братьею, или по нем хто иныи игумен будут, убытка не довести никакова. А что ся в нашеи трети деревни Павелкова в нашем долгу учинит убытка игумену Лаврентию з братьею, и мне, Ивану, и моим детем тот убыток платить собою.

А на то послуси: Верещага Иванов сын Миклюкова да Угрим Григорьев сын Суворова, да Иван Микитин сын Протопопов, да Павел Романов сын Ременникова, да Степан Яковлев Ботвиньева, да Суморок Тимофеев сын Сьянова.

Акты Троицкого Калязина монастыря XVI в., 2007



Миклюково — опустевшая деревня в Кашинском городском округе Тверской обл. (Wiki)

Миклюков-Суворов-Куфарев-Бергман-...-Гильберт-Клейн-..-Гаусс

.. *Прошу скорректировать биографические данные известного российского математика Павла Куфарева (автора известного уравнения Левнера-Куфарева). К сожалению, информации о его научном руководителе по **Mathematics Geneaology Project** нет. Фактически, его научным руководителем в Томском университете (СССР, степень к.ф.-м.н. защищена в 1935 г.) был Стефан Бергман, другой известный математик (известный, например, своими пространствами Бергмана). Есть много причин, по которым информация о Бергмане и Куфареве является неполной или даже отсутствует: во-первых, это эмиграция Бергмана из Германии в 1933 в СССР, 2) это была сложная ситуация в СССР в 1934-1937-е годы, особенно с немецкими именами, такими как Бергман. Кроме того, Бергман иммигрировал в США в 1937(1939?) г., и его имя в значительной степени было практически запрещено в советской математике того периода. До 1939 года в MathSciNet нет ни одной статьи Бергмана.*

Что касается Куфарева, то в 1969 г. в некрологе Куфарева, опубликованном в Усп. Мат. наук появляется замечание о том, что по совету Б.А. Фуксом и С.Б. Бергманом в 1935 г. в качестве кандидатской диссертации. Было бы справедливо исправить ошибку и включить Павла Куфарева в число учеников Стефана Бергмана.

[.... ссылки]

В. Ткачев, май 2016

Mathematics Genealogy Project

Georgy Dmitrievich Suvorov

Biography MathSciNet

Candidat 1951

Dissertation:

Advisor 1: Pavel Parfent'evich Kufarev

Students:
Click here to see the students listed in chronological order.

Name	School	Year	Descendants
Ionin, Vladimir	Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk	1963	4
Ivanov, Oleg	Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk	1981	
Miklyukov, Vladimir	Donetsk University	1970	11

Pavel Parfent'evich Kufarev

MathSciNet

Ph.D. Tomsk State University 1935

Dissertation: *Torsion and bending of members of polygonal section*

Mathematics Subject Classification: 30—Functions of a complex variable

Advisor 1: Stefan Bergman

Student:

Name	School	Year	Descendants
Suvorov, Georgy		1951	18

According to our current on-line database, Pavel Kufarev has 1 student and 19 descendants.
We welcome any additional information.

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY MATHSCINET MATHEMATICAL REVIEWS

B **Bergman, Stefan**

MR Author ID	412288
Earliest Indexed Publication	1939
Total Publications	140
Total Related Publications	6
Total Reviews	96
Total Citations	572 in 467 publications
Unique Citing Authors	489

О чем рассказ?

The Alexander Vasiliev Award

Certificate

The prize for the best article published in 2018
in *Analysis and Mathematical Physics*
is awarded to

Vladimir G. Tkachev

For his paper
Sharp pointwise gradient estimates for Riesz potentials with a bounded density
Appeared in *Analysis and Mathematical Physics*
Volume 8, Issue 4, pp. 711-730

The Editor-in-Chief

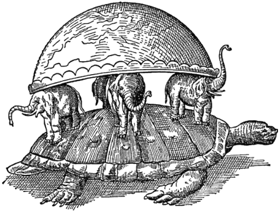
Dmitry Khavinson

The Publisher

Birkhäuser

В (геометрическом) анализе есть всегда два основных ингредиента: неравенство Коши-Буняковского и интегрирование по частям (с бесконечным множеством вариаций).

Математический фольклор (или ВММ?...)



На самом деле, В.М.М. также был очень сильным апологетом разных вариаций на тему **теоремы Фубини и ее аналогов таких как "формулы Федерера"** (co-area formula), в том числе и самой книги (фотокопии) Федерера "Геометрическая теория меры", а также и бестселлера 80х "**Геометрические неравенства**" Бураго и Залгаллера.

Правильные контексты

- L-проблема моментов в одномерном случае (Марков, Ахиезер, Крейн)
- "экспоненциальное преобразование" (Крейн, Putinar)
- L-проблема моментов в $\mathbb{C}$ и квадратурные области (Putinar, Gustafsson, V.T.)
- Мероморфный результант на компактных римановых поверхностях (Gustafsson, V.T.)

А также "с другой стороны"

- потенциалы Рисса в теории регулярности (Adams, Hedberg, Мазья, Mingione)
- Moving-centre monotonicity formulas (Jonathan Zhu, Naff, McGrath)
- поточечные оценки градиентов потенциалов Рисса для ограниченных плотностей (V.T.)

Следствие $n = 1$ (V.T., 2018)

Для любой измеримой функции $0 \le \rho(x) \le 1$ с **компактным** носителем, $0 \notin \operatorname{supp}\rho$, выполнено

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(x)}{|x|}dx\right) \le \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(x)}{x^2}dx,$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)dx\right)^2 \le \tanh\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(x)}{|x|}dx\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty}|x|\rho(x)dx.$$

Оба неравенства точные и достигаются в точности, когда $\rho(x) = \chi_{[a,b]}$, $ab > 0$.

Замечание 1. Например для $\rho = \chi_{[a,b]}$ неравенство становится равенством:

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(b-a)\cdot\frac{b-a}{ab}.$$

Замечание 2. Пример применения 2го неравенства для $\rho = \frac{1}{1+x^2}$ и $[a,b] = [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$:

$$0.06854 = \frac{\pi^2}{144} < \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\ln\frac{3}{2} = 0.06956$$

Трансцендентные аналоги неравенства Коши-Буняковского (V.T., 2018)

Следствие $n = 2$ (V.T., 2018)

При тех же предположениях:

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x\rho}{x^2+y^2}\, dA\right)^2}{\pi \int_{\mathbb{R}^2} \rho\, dA} \le 1 - \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho}{x^2+y^2}\, dA\right).$$

В частности, если ρ – характеристическая функция множества Ω (отделённого от начала координат)

$$\frac{1}{\pi|\Omega|}\left(\int_{\Omega} \frac{x\, dA}{x^2+y^2}\right)^2 \le 1 - \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{dA}{x^2+y^2}\right)$$

Равенство достигается для *любого диска с центром на оси* x.

Замечание

Функция $f := \frac{x}{x^2+y^2}$ – гармоническая, поэтому для круга $\Omega = B_r(a)$ левая часть

$$\frac{1}{\pi|\Omega|}\left(\int_{\Omega} \frac{x\, dA}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{|\Omega|}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2},$$

откуда находим

$$\int_{B_r(a)} \frac{dA}{x^2+y^2} = -\pi \ln\bigl(1 - \frac{r^2}{a^2}\bigr)$$

Классическая L-проблема моментов

10 М. Г. КРЕЙН

В 1896 г. в мемуаре «Новые приложения непрерывных дробей» [14ж] А. А. Марков обобщает проблему ещё в другом направлении, а именно: он решает задачу о нахождении граничных величин интегралов (*) при данных величинах интегралов

$$\int_0^l f(t)\,dt,\quad \int_0^l t f(t)\,dt,\quad \ldots,\quad \int_0^l t^{n-1} f(t)\,dt$$

и дополнительном требовании, что функция $f(t)$ ограничена данным положительным числом $\mathscr{L}$:

$$0 \leqslant f(t) \leqslant \mathscr{L}.$$

Для решения рассматриваемых в этом мемуаре вопросов А. А. Марков пользуется разложениями в непрерывные дроби различного типа двух выражений:

$$e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{z-t}} \quad \text{и} \quad \frac{z-b}{z-a}\, e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{z-t}}, \qquad (6)$$

устанавливая ряд важных свойств этих разложений.

Крейн и Ахиезер в 1930х решают ряд более общих задач, в частности вводят экспоненциальное преобразование $\rho(x)$, а именно тождество на уровне формальных рядов

$$\exp\left(-\frac{1}{L}\left(\frac{\ell_1}{t}+\frac{\ell_2}{t^2}+\ldots\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{L}\int_a^b \frac{\rho(\zeta)\,d\zeta}{t-\zeta}\right)$$
$$=: 1 + \frac{\sigma_1}{t} + \frac{\sigma_2}{t^2} + \ldots = E(\rho(x), t)$$

Андрей Андреевич Марков (1856-1922)

Наум Ильич Ахиезер (1901-1980)

Марк Григорьевич Крейн (1907-1989)

Адольф Абрамович Нудельман (1931-2011)

Пример. Если $\rho(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, то $\ell_n = \frac{b^n - a^n}{n}$, $n \geq 1$, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n t^{-n} = \ln \frac{t-a}{t-b}$

$$E(\chi_{[a,b]}(x), t) = \frac{t-b}{t-a} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{n-1}(b-a)}{t^n}$$

Для объединения интервалов получается произведение $\prod \frac{t-b_i}{t-a_i}$, **рациональная функция**, в частности последовательность определителей Ганкеля **зануляется** после некоторого целого N.

Теорема (Крейн, Ахиезер, Нудельман)

- L-проблема Маркова имеет решение тогда и только тогда, когда последовательность (σ_n) порождает неотрицательно определённую форму $(\sigma_{i+j})_{0 \leq i,j \leq N}$.
- Класс экстремальных решений L-проблемы Маркова соответствует вырожденным неотрицательно определённым последовательностям (σ_n), т.е. $\exists N$: $\det(\sigma_{i+j})_{0 \leq i,j \leq N} = 0$.
- Любое экстремальное решение пропорционально характеристической функции объединения $\leq N$ интервалов: $\rho = L \cdot \chi_{\cup \Delta_i}$.

Если $L = 1$ и $I = [0, \infty)$, разрешимость соответствующей L-проблемы моментов эквивалентна проблеме Стилтьеса для $\{\sigma_k\}_{k \geq 0}$, то есть $\Delta_m := \det(\sigma_{i+j})_{i,j=0}^m \geq 0$, $\Delta_m' \geq 0$ для $m \geq 0$.

Пример

Используя экспоненциальное преобразование, получим одно из *неравенств Маркова*

$$\ell_0^4 \leq 12(\ell_0 \ell_2 - \ell_1^2), \quad \text{и т.д. более высокий порядок} \tag{1}$$

Вернёмся к начальным двум неравенствам и перепишем их для луча:

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\rho(x)}{x}dx\right) \le \frac{1}{4}\int_0^\infty \rho(x)dx \cdot \int_0^\infty \frac{\rho(x)}{x^2}dx, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \rho(x)dx\right)^2 \le \tanh\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\rho(x)}{x}dx\right) \cdot \int_0^\infty x\rho(x)dx. \tag{3}$$

для любой измеримой плотности $0 \le \rho \le 1$. Напомним определение моментов ρ

$$\ell_k(\rho) := \int_{\mathbb{R}+} \rho(x)x^{k-1}dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

(3) и (2) – неравенства с **критической** экспонентой $k = 0$. Градуировка (однородный вес):

$$\deg \ell_k = k, \qquad \deg(\ell_i\ell_j \dots \ell_k) = \deg \ell_i + \deg \ell_j + \dots + \deg(\ell_k).$$

Инверсия $x \to 1/x$ задает соответствие между ℓ_m для $\deg \ell_k < 0$ и $\deg \ell_k > 0$:

$$\ell_k(\rho) = \ell_{-k}(\widetilde{\rho}), \qquad \widetilde{\rho}(t) = \rho(x^{-1}) \tag{4}$$

Неравенства для моментов $k \ge 1$ эквивалентны соответствующим неравенствам для $m \le -1$, но центральный момент ℓ_0 оказывается "особым". В этом смысле наши неравенства является новыми:

$$4\sinh^2(\frac{1}{2}\ell_0) \le \ell_1\ell_{-1}, \qquad \ell_1^2 \le 4\ell_2 \tanh(\frac{1}{2}\ell_0).$$

Вполне ожидаемо, в отличие от алгебраических неравенств Маркова-Стильтьеса, эти два – трансцендентные. Исключая из неравенств ℓ_{-1}, получим еще одно новое неравенство

$$4\ell_1^3 + \ell_1^4\ell_{-1} \le 4\ell_2^2\ell_{-1}$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)dx\right)^3 + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\rho(x)}{x^2}dx \cdot \left(\int_0^\infty \rho(x)dx\right)^4 \le \int_0^\infty x\rho(x)dx \cdot \int_0^\infty \frac{\rho(x)}{x^2}dx.$$

Мотивации

Gustafsson и Putinar ввели (Ind.Univ.Math.J., 2003) экспоненциальное преобразование $0 \le \rho \le 1$

$$E_\rho(x) = \exp\left[-\frac{2}{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\rho(\zeta)d_\omega\zeta}{|x-\zeta|^n}\right] = \exp(-\frac{2}{n}\mathcal{I}_0(x)), \qquad d_\omega\zeta := \frac{1}{\omega_n}d\zeta.$$

и доказали, что несмотря на то, что интеграл (потенциал Рисса) имеет **логарифмическую сингулярность**, если x приближается к гладкой части границы $\partial \operatorname{supp}\rho$, экспоненциальное преобразование восстанавливает не только гладкость, но и вещественную аналитичность.

Случай характеристической функции $\rho = \chi_\Omega$ наиболее интересный. Например

$$E_\Omega(x) = \begin{cases} \frac{x_n-b}{x_n-a}, & \text{if} \quad x_n > b, \\ \frac{x_n-a}{x_n-b}, & \text{if} \quad x_n < a, \end{cases} \qquad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : a < x_n < b\}.$$

В той же работе доказано, что в размерности 2: $\ln(1-E_\Omega(x))$ – субгармоническая функция для $x \notin \Omega$. Доказательство использует интегральные оценки Рисса и оценки емкости (Ahlfors-Beurling). Кроме того, высказывается гипотеза, что в реальности должен выполняться строгий результат:

Гипотеза (Gustafsson и Putinar, 2003)

$$\begin{cases} \ln(1-E_\rho), & \text{if} \quad n = 2, \\ \frac{1}{n-2}(1-E_\rho)^{(n-2)/n}, & \text{if} \quad n \ge 3, \end{cases}$$

является субгармонической вне $\operatorname{supp}\rho$ для любой плотности $\rho \not\equiv 0$.

Мотивации

Пусть $\mathcal{M}_n(t)$ – единственное решение начальной задачи

$$\mathcal{M}_n'(t) = 1 - \mathcal{M}_n^{2/n}(t), \qquad \mathcal{M}(0) = 0.$$

Например, $\mathcal{M}_1(t) = \tanh t$ и $\mathcal{M}_2(t) = 1 - e^{-t}$.

Теорема 1 (V. Tkachev, 2005)

Для любой измеримой плотности $0 \le \rho(x) \le 1$, т.ч. носитель $0 \notin \operatorname{supp} \rho$, выполнено

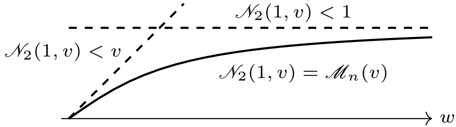
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1 \rho(x)}{|x|^n}\, d_\omega x\right)^2 \le \mathcal{M}_n\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(x)}{|x|^n}\, d_\omega x\right) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(x)}{|x|^{n-2}}\, d_\omega x, \qquad d_\omega x = \frac{1}{|B_n|}\, dx. \tag{5}$$

Неравенство точное и достигается в точности когда $\rho(x)$ – характеристическая функция любого шара B с центром на оси x_1, $0 \notin \overline{B}$. В частности, для $n \ge 3$

$$\mathcal{M}_n^{\frac{n-2}{n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(x)}{|x|^n}\, d_\omega x\right)$$

является субгармонической функцией вне носителя ρ.

Что будет если огрубить $\mathcal{M}_n(t)$ или до 1 (при больших t) или до t (при малых)



Определения

Рассмотрим потенциал Рисса индекса $0 \leq \alpha < n$ для плотности ρ с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$

$$(\mathcal{I}_\alpha \rho)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(\zeta) d_\omega \zeta}{|\mathbf{x} - \zeta|^{n-\alpha}}$$

где $d_\omega \zeta := \frac{1}{\omega_n} d\zeta (= \frac{1}{\omega_n} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n)$, ω_n – n-мерный объем единичного шара. Тогда

$$\frac{1}{n-\alpha} (\nabla \mathcal{I}_\alpha \rho)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\mathbf{x} - \zeta)\rho(\zeta)}{|\mathbf{x} - \zeta|^{n+2-\alpha}} \, d_\omega \zeta.$$

Неравенство выше можно интерпретировать как **поточеченую** точную оценку

$$\frac{1}{(n-2)^2} |\nabla \mathcal{I}_2 \rho(y)|^2 \leq \mathcal{M}_n(\mathcal{I}_0 \rho(y)) \cdot \mathcal{I}_2 \rho(y),$$

для градиента потенциала Рисса порядка $0 \leq \alpha < n$ для ограниченной плотности $\rho(x)$ с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. Некоторые близкие результаты в этом направлении:

- (Adams-Hedberg): для $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ и $1 < \alpha < n$ существует A т.ч.

  $$|\nabla \mathcal{I}_\alpha f(x)|^\alpha \leq A(\alpha, p, n) \cdot Mf(x) \cdot (\mathcal{I}_\alpha f(x))^{\alpha - 1}, \tag{6}$$

  где $Mf(y)$ – максимальная функция Харди-Литтлвуда. В частности, для $\alpha = 2$ ($p < \infty$!)

  $$|\nabla \mathcal{I}_\alpha f(x)|^2 \leq A \cdot Mf(x) \cdot \mathcal{I}_\alpha f(x).$$

- Другие обобщения в терминах функции Харди-Литтлвуда для **комплексного** $\alpha \in \mathbb{C}$ получены (Mazya–Shaposhinkova 1999).
- Недавние градиентные оценки для $\mathcal{I}_\alpha$ для уравнения Пуассона и квазилинейных уравнений (Mingione 2011, Garg–Spector 2015).

Определения

Заметим тривиальное применение неравенства Коши-Буняковского:

$$\frac{1}{n-\alpha}|\nabla \mathcal{I}_\alpha \rho| \le \sqrt{\mathcal{I}_\alpha \rho \cdot \mathcal{I}_{\alpha-2}\rho}.$$

Однако такая оценка далека от оптимальной.

Постановка задачи

Дана измеримая плотность $0 \le \rho(x) \le 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, и $0 \notin \operatorname{supp}\rho$. Найти точное неравенство для

$$\mathcal{I}_\alpha \rho \quad \mathcal{I}_{\alpha-2}\rho, \quad \text{and} \quad w := \frac{1}{n-\alpha}|\nabla \mathcal{I}_\alpha \rho|.$$

Пара $(u, v) \subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ называется *допустимой* если существует $0 \le \rho \le 1$ т.ч. $\mathcal{I}_\alpha \rho = u$ и $\mathcal{I}_{\alpha-2}\rho = v$.
Пусть

$$\mathcal{N}_\alpha(u, v) := \sup_\rho \left\{ w^2 : \ \mathcal{I}_\alpha \rho = u, \quad \mathcal{I}_{\alpha-2}\rho = v \right\},$$

то выполнено точное неравенство

$$\frac{1}{n-\alpha}|\nabla \mathcal{I}_\alpha \rho| \le \sqrt{\mathcal{N}_\alpha\left(\mathcal{I}_\alpha \rho, \mathcal{I}_{\alpha-2}\rho\right)}.$$

Так например, используя неравенство Коши-Буняковского,

$$\mathcal{N}_\alpha(u, v) \le uv.$$

Теорема 2 (V. Tkachev, 2018)

Пусть $n \geq 1$ *и* $\alpha \in (0, 2]$. *Тогда множество допустимых пар – положительный квадрант* $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ *и*

$$\boxed{\mathscr{N}_\alpha(u, v) = u^{2(\alpha-1)/\alpha} \frac{h^2_\alpha(t)}{f^{2(\alpha-1)/\alpha}_\alpha(t)}, \qquad \forall u, v > 0} \tag{7}$$

где $t = t(u, v)$ *единственно определяется соотношением*

$$f^{2-\alpha}_\alpha(t) f^\alpha_{\alpha-2}(t) = u^{2-\alpha} v^\alpha. \tag{8}$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_\alpha(t) &= t^{2-n}(t^2 - 1)^{n/2} F(\tfrac{2-\alpha}{2}, \tfrac{2+\alpha}{2}; \tfrac{n+2}{2}, 1 - t^2) \\ h_\alpha(t) &= t^{1-n}(t^2 - 1)^{n/2} F(\tfrac{2-\alpha}{2}, \tfrac{\alpha}{2}; \tfrac{n+2}{2}, 1 - t^2), \end{aligned}$$

и $F(a, b; c, t)$ *— гипергеометрическая функция Гаусса.*

Для общих значений α возникают естественные вопросы:

- Как "форма" $\mathscr{N}_\alpha(u, v)$ зависит от u и v?
- Разделяется ли "форма" $\mathscr{N}_\alpha(u, v)$ на функции только от u и v?
- Когда $\mathscr{N}_\alpha(u, v)$ симметрична как функция u и v?

Теорема 3 ($\alpha = 2$, V.T., 2018)

Для любой измеримой $0 \le \rho(x) \le 1$, $0 \notin \operatorname{supp}\rho$, *выполнена точная оценка*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1\rho(x)}{|x|^{n+1}}\ d_\omega x\right| \le \Phi_n\left(\sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(x)}{|x|^{n-1}}\ d_\omega x \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(x)}{|x|^{n+1}}\ d_\omega x}\right), \tag{9}$$

где $\Phi_n(s)$ *единственное решение сингулярного ОДУ*

$$\Phi_n'' = \frac{\Phi_n'(\Phi_n'^2 - 1)}{(n-1)\Phi_n\Phi_n' + s}, \qquad \Phi_n(0) = 0, \ \ \Phi_n'(0) = 1 \tag{10}$$

удовлетворяещего асимптотическому условию

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Phi_n(s)}{\ln s} = \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}. \tag{11}$$

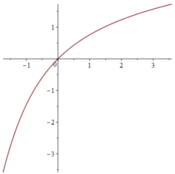
Для $n = 1$ получается

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x)}{|x|}dx\right) \le \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x)}{x^2}dx.$$

Случай $n = 2$ выделяется в нескольких отношениях: Φ_2 из (10) имеет дополнительную симметрию из-за $n - 1 = 1$, см. следующую страницу.

The case $\alpha = 1$ and $n = 2$

Случай $n = 2$ и $\alpha = 1$ является особенным. Как $\Phi_2(s)$, так и ее обратная функция удовлетворяют тому же ОДУ



$$\Phi_2'' = \frac{\Phi_2'(\Phi_2'^2 - 1)}{\Phi_2 \Phi_2' + s}, \qquad \Phi_2(0) = 0, \;\; \Phi_2'(0) = 1$$

Более того, Φ_2 допускает следующую параметризацию полными эллиптическими интегралами:

$$[s(k), \Phi(k)] = [\frac{4}{\pi}(E(k) - K(k)), \; \frac{4}{\pi}(k \cdot K(k) - \tfrac{1}{k} \cdot E(k))],$$

где

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-(1-k^2)t^2}}, \qquad E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-(1-k^2)t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Функция Φ_2 имеет примечательное разложение Тейлора в начале координат:

$$\Phi_2(z) = z - \tfrac{1}{2^2} z^2 + \tfrac{1}{2^4} z^3 - \tfrac{7}{2^9} z^4 + \tfrac{5}{2^{11}} z^5 - \tfrac{21}{2^{16}} z^6 + \tfrac{3}{2^{17}} z^7 + \tfrac{7}{2^{24}} z^8 + \tfrac{11}{2^{26}} z^9 - \tfrac{959}{2^{32}} z^{10} + \ldots$$

и $\Phi(z)$ удовлетворяет следующему инволютивному свойству:

$$\boxed{(-\Phi_2) \circ (-\Phi_2) = \mathrm{id}.}$$

Мы пока не знаем никакого концептуального объяснения этих фактов.

… в двух частях … с прологом и эпилогом

Экспоненциальное преобразование в $\mathbb{R}^n$

Экспоненциальное преобразование может быть истолковано как потенциал зависящий от области в $\mathbb{R}^n$, или более общо от плотности $\rho(x)$ с компактным носителем и $0 \leq \rho \leq 1$:

$$E_\rho(x) = \exp\left[-\frac{2}{n\omega_n}\int \frac{\rho(\zeta)dA(\zeta)}{|x-\zeta|^n}\right],$$

Если $\rho(x) = \chi_D(x)$ то $E_D(x) = \exp\left[-\frac{2}{n\omega_n}\int_D \frac{dA(\zeta)}{|x-\zeta|^n}\right]$.

2D-поляризованная версия над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ появляется в 1970s в теории операторов как principal function некоторых близких к нормальным операторам (J. D. Pincus, *Acta. Math.*, 1968) и интенсивно изучается (Carey, Helton, Howe), однако корни уходят к работам Крейна 1950х по "функциям спектрального сдвига".

Многочисленные приложения, далеко за пределами анализа и теории операторов. Мы упомянем одно из них ниже.

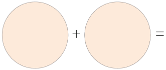
(M. Putinar, 1996)

Для любой измеримой $\rho : \mathbb{C} \to [0,1]$ с компактным носителем, сушествует единственный неприводимый линейный ограниченный оператор T действующий на некотором гильбертовом пространстве H со свойством $[T^*, T] = \xi \otimes \xi$, разглагает E_ρ следующим образом

$$E_\rho(z,w) = \exp\left[-\frac{1}{\pi}\int \frac{\rho(\zeta)\, dA(\zeta)}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{w})}\right] = 1 - \langle (T^* - \bar{w})^{-1}\xi,\, (T^* - \bar{z})^{-1}\xi\rangle \qquad (12)$$

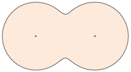
По аналогии с $n=1$ экспоненциальным преобразованием, в двумерном случае экстремальными являются объединения непересекающихся кругов, и в общем случае квадратурные области.

Пример. Для круга $D(0,1)=\{|z|<1\}$, $E_D = 1-\frac{1}{z\bar{w}}$. Для двух и более кругов, произведение, например $\Omega = D(-1,1)\cup D(1,1)$:



$$E_\Omega = \left(1-\frac{1}{(z+1)(\bar{w}+1)}\right)\left(1-\frac{1}{(z-1)(\bar{w}-1)}\right).$$

переходящее в слияние двух кругов $\Omega = \mathbb{D}(-1,r)\boxplus\mathbb{D}(1,r)$, $r>1$ (квадратурную область):



$$E_\Omega = 1-\frac{1+A(r)z\bar{w}}{(\bar{w}^2-1)(z^2-1)}.$$

Граница области задаётся алгебрическим уравнением $E_\Omega = 0$

Aharonov-Shapiro 1976; Gustafsson 1983

Ω называется квадратурной областью если существуют $z_i\in\Omega, c_i\in\mathbb{C}$ т.ч.

$$\iint_\Omega h\,dxdy = \sum_{i=1}^n c_i h(z_i) \quad \forall h\in L^1(\Omega), \quad h(x) \text{ аналитическая функция.}$$

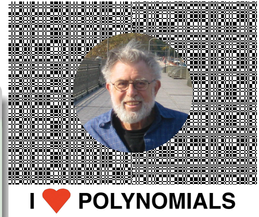
B. Gustafsson, 1983

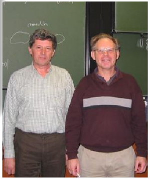
Область Ω – квадратурная тогда и только тогда, когда ее функция Шварца мероморфна на Шотки-дубль $\Omega\oplus\Omega^+$. Граница квадратурных областей всегда алгебраическая.

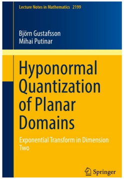
Aharonov-Shapiro 1976; Gustafsson 1983, Putinar 1996

Следующие утверждения эквивалентны:

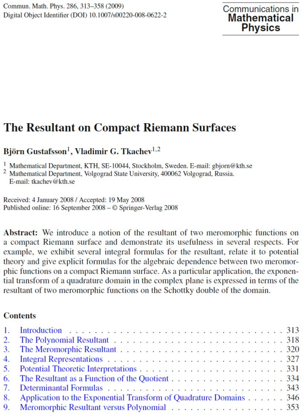
- $E_\Omega(z,w)$ рациональная функция $= \frac{Q(z,w)}{P(z)\overline{P(w)}}$, $|z|, |w| \gg 1$;
- Ω is a квадратурная область;
- Ω определена конечным числом моментов ℓ_{jk} $\Leftrightarrow$ $\det(\sigma_{jk})_0^N = 0$ для некоторого N;
- Существует ограниченный линейный оператор T действующий на некотором гильбертовом пространстве H со спектром равным Ω и rank one self commutator $[T^*, T] = \langle \xi \otimes \xi \rangle$, такой что линейная оболочка $(T^{*k}\xi)_{k \geq 0}$ конечномерна.







Почему мероморфный результант?



Commun. Math. Phys. 286, 313–358 (2009)
Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s00220-008-0622-2

Communications in Mathematical Physics

The Resultant on Compact Riemann Surfaces

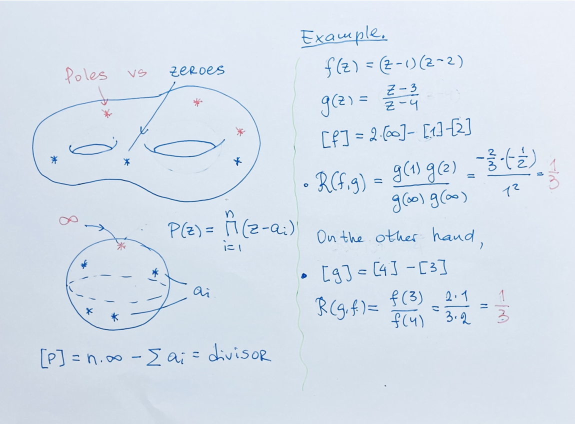
Björn Gustafsson[1], Vladimir G. Tkachev[1,2]

[1] Mathematical Department, KTH, SE-10044, Stockholm, Sweden. E-mail: gbjorn@kth.se
[2] Mathematical Department, Volgograd State University, 400062 Volgograd, Russia.
E-mail: tkachev@kth.se

Received: 4 January 2008 / Accepted: 19 May 2008
Published online: 16 September 2008 – © Springer-Verlag 2008

Abstract: We introduce a notion of the resultant of two meromorphic functions on a compact Riemann surface and demonstrate its usefulness in several respects. For example, we exhibit several integral formulas for the resultant, relate it to potential theory and give explicit formulas for the algebraic dependence between two meromorphic functions on a compact Riemann surface. As a particular application, the exponential transform of a quadrature domain in the complex plane is expressed in terms of the resultant of two meromorphic functions on the Schottky double of the domain.

Contents



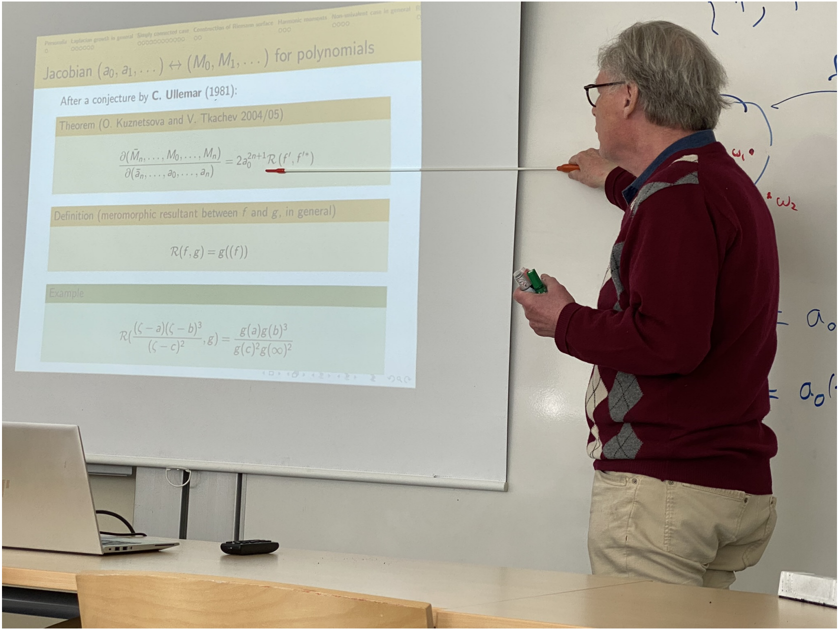
Даны f, g – мероморфные функции на компактной Римановой поверхности M. Их мероморфный результант определяется (B. Gustafsson, V.Tkachev, *Comm. Math. Phys.*, 2009):

$$\mathcal{R}(f,g) = g((f)) = \frac{g(f^{-1}(0))}{g(f^{-1}(\infty))} = \prod_{i=1}^{m} \frac{g(a_i)}{g(\sigma_i)}$$

где $(f) = \sum a_i - \sum \sigma_i$ полный дивизор f. Тогда экспоненциальное преобразование квадратурной области Ω является мероморфным результантом на Шотки-дубле Ω:

$$E_\Omega(z,w) = \mathcal{R}(f-z, g-\bar{w}).$$

Бьёрн Густафссон определяет мероморфный результант



Саша Васильев (1.4.1962 – 19.10.2016)

Zürich, ICM94